Моделирование мотивирующего трудового контракта с учетом нематериального стимулирования

Борисов Иван Александрович,

ассистент кафедры экономической теории

Уральского государственного университета им. А. М. Горького

УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ СКРЫТЫХ ДЕЙСТВИЙ

1. Конфликт интересов между принципалом и агентом;
2. Асимметрия информации;
3. Неопределенность.

Базовая биномиальная модель стимулирующего контракта (B. Salanie. The economics of contracts. MIT Press, Cambridge, 1997, pp. 122 – 123.).

Два уровня усилий, выраженных в денежном эквиваленте: $a = 1$ – прикладывает усилия и $a = 0$ – не прикладывает.

Два возможных состояния технологии: «успех» и «провал»:

- Работник прикладывает усилия – вероятность успеха проекта – P;
- Усилия не прикладываются – вероятность успеха снижается до $p < P$.

Решение биномиальной модели стимулирующего контракта.

Ограничение по стимулам (IC)

$$Pw_s + (1 - P)w_f - 1 \geq pw_s + (1 - p)w_f$$

Ограничение на участие (PC)

$$Pw_s + (1 - P)w_f - 1 \geq w_r$$

Оптимальный контракт:

$$w_s = w_r + \frac{1 - p}{P - p}$$

$$w_f = w_r - \frac{p}{P - p}$$

ОСНОВНЫЕ МОДИФИКАЦИИ БАЗОВОЙ ДВУХПЕРИОДНОЙ МОДЕЛИ:

- Агент контролирует процесс с множеством возможных дискретных объемов выпуска, прилагая усилия, которые могут принимать множество дискретных значений;
- Агент контролирует непрерывную производственную функцию – функция распределения результата реализации контракта от усилий агента, которые принимают заданный фиксированный набор значений. $P(a) = (p_1(a),..., p_j(a),..., p_m(a))$
- Агент контролирует непрерывную производственную от усилий агента, которые принимают значения на непрерывном интервале. $F(x,a)$

Модель оптимального стимулирующего контракта Б. Холмстрема и П. Милгрома (1987)

•Существует множество возможных результатов реализации контракта, которые являются случайными величинами с известным законом распределения.

•Агент может повилять на вероятность достижения того или иного результата за счет предприятия определенных усилий.

•Производственная технология агента описывается многомерным броуновским движением.

•Принципалу доступна только часть информации о результатах действия.

•Предпринимаемые агентом усилия затратны, и эти затраты могут быть выражены в денежных единицах.

•Функции полезности принципала и агента являются экспоненциальными с постоянным индексом неприятия риска (Неймона-Моргенштерна): $v(y) = -\exp(-Ry)$ $u(y) = -\exp(-ry)$

Контракт Б. Холмстрема и П. Милгрома (1987)

$$s(Z^1) = w_r + c(\mu^*) + c'(\mu^*)^T (Z^1 - \mu^*) + (r/2) c'(\mu^*)^T \Sigma c'(\mu^*)$$

w_r – резервная заработная плата;

$c(\mu^*)$ – компенсация издержек предприятия должных усилий;

$c'(\mu^*)^T (Z^1 - \mu^*)$ – мотивация должных усилий и оптимальное распределение риска;

$(r/2) c'(\mu^*)^T \Sigma c'(\mu^*)$ – премия за риск .

Контракт Х. Мюллера (1996 г.)

$$s(Z^1) = w + c(\mu^*) + \frac{R}{R+r}\left(Z^1 - \mu^*\right) + \frac{r}{2}\left(\frac{R}{R+r}\right)^2 \sigma^2$$

Модификации контракта Б.Холмстрема и П.Милгрома

1. Случай с множеством сигналов.
2. Модель с несколькими процессами.
3. Модель, с неопределенной технологией.

Модель с несколькими агентами С. Елтекина (1997 г.)

Производственная технология агента: $P(q \mid a, \eta)$

Вероятность возникновения шока: $G(\eta)$

Наборы допустимых действий, объемов выпуска и потребления, выплат:

$$a \in A, q \in Q, c \in C$$

Функция полезности агента: $U(a, c) = \dfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \gamma a^2$

Допустимое множество ожидаемой полезности агента: $W \in \left[\underline{w}, \overline{w}\right]$

Целевые функции принципала и агента:

$$w = E_0\left(\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(a_t, c_t)\right) \quad S(w) = E_0\left(\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t (q_t - c_t)\right)$$

Эндогенная переменная: $\Pi^{w_1, w_2}(a_1, a_2, q_1, q_2, w_1', w_2')$

Модель с несколькими агентами С.Елтекина (1997 г.)

Целевая функция принципала:

$$S^*(w_1, w_2) = \max_{\Pi^{(w_1,w_2)} \in D_2} \sum_{A^2 \times Q^2 \times C^2 \times W^2} \{(q_1 + q_2 - c_1 - c_2) + \beta S(w_1', w_2')\} \Pi^{(w_1,w_2)}(a_1, a_2, q_1, q_2 c_1, c_2, w_1', w_2')$$

Ограничение на участие:

$$w_1 = \sum_{A^2 \times Q^2 \times C^2 \times W^2} \{U(a_1 c_1) + \beta w_1'\} \Pi^{(w_1,w_2)}(a_1 a_2, q_1, q_2, c_1, c_2, w_1', w_2')$$

$$w_2 = \sum_{A^2 \times Q^2 \times C^2 \times W^2} \{U(a_2, c_2) + \beta w_2'\} \Pi^{(w_1,w_2)}(a_1 a_2, q_1, q_2, c_1, c_2, w_1', w_2')$$

Модель с несколькими агентами С. Елтекина (1997 г.)

Ограничение по стимулам:

$$\forall(a_1,\overline{a_1})\in A\times A \sum_{A^2\times Q^2\times C^2\times W^2}\{U(a_1,c_1)+\beta w_1'\}\Pi^{(w_1,w_2)}(a_1,a_2,q_1,q_2c_1,c_2,w_1',w_2')\geq$$

$$\geq \sum_{A^2\times Q^2\times C^2\times W^2}\{U(\overline{a}_1,c_1)+\beta w_1'\}\frac{\sum_{\eta}P(q_1\mid \overline{a_1},\eta)P(q_2\mid a_2,\eta)G(\eta)}{\sum_{\eta}P(q_1\mid a_1,\eta)P(q_2\mid a_2,\eta)G(\eta)}\Pi^{(w_1,w_2)}(a_1,a_2,q_1,q_2c_1,c_2,w_1',w_2')$$

$$\forall(a_2,\overline{a_2})\in A\times A \sum_{A^2\times Q^2\times C^2\times W^2}\{U(a_2,c_2)+\beta w_2'\}\Pi^{(w_1,w_2)}(a_1,a_2,q_1,q_2c_1,c_2,w_1',w_2')\geq$$

$$\geq \sum_{A^2\times Q^2\times C^2\times W^2}\{U(\overline{a}_2,c_2)+\beta w_2'\}\frac{\sum_{\eta}P(q_1\mid a_1,\eta)P(q_2\mid \overline{a}_2,\eta)G(\eta)}{\sum_{\eta}P(q_1\mid a_1,\eta)P(q_2\mid a_2,\eta)G(\eta)}\Pi^{(w_1,w_2)}(a_1,a_2,q_1,q_2c_1,c_2,w_1',w_2')$$

Модель с несколькими агентами С. Елтекина (1997 г.)

Эндогенные переменные должны быть совместимы с производственной функцией агентов:

$$\forall(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{q}_1,\overline{q}_2)\in A^2\times Q^2 \sum_{C^2\times W^2}\Pi^{(w_1,w_2)}(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{q}_1,\overline{q}_2,c_1,c_2,w_1',w_2')=$$

$$=\sum_{\eta}P(\overline{q}_1\mid\overline{a}_1,\eta)P(\overline{q}_2\mid\overline{a}_2,\eta)G(\eta)\sum_{Q^2\times C^2\times W^2}\Pi^{(w_1,w_2)}(\overline{a}_1,\overline{a}_2,q_1,q_2c_1,c_2,w_1',w_2')$$

Сумма эндогенных переменных должна быть равна единице, и они должны быть неотрицательны, так как представляют собой вероятностную меру:

$$\sum_{A^2\times Q^2\times C^2\times W^2}\Pi^{(w_1,w_2)}(a_1,a_2,q_1,q_2,c_1,c_2,w_1',w_2')=1$$

$$\Pi^{(w_1,w_2)}(a_1,a_2,q_1,q_2,c_1,c_2,w_1',w_2')\geq 0$$

Модель оптимального контракта Ю.Санникова (2004).

Производственная технология агента:

$$dX_t = A_t dt + \sigma dZ_t \qquad A = \left\{A_t \in \overline{A}, 0 \le t < \infty\right\}$$

Затраты приложения усилий: $c(A_t)$, $c(0) = 0$.
Мотивационная схема: $U_t\,(X_s;\ 0 \le s \le t)$.
Затраты на мотивацию: $g(u)$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$.

Модель оптимального контракта Ю.Санникова (2004).

Целевая функция принципала:

$$E\left[\int_0^\infty \ell^{-rt} dX_t - \int_0^\infty \ell^{-rt} g(U_t)dt\right]$$

Ограничение на участие:

$$E\left[\int_0^\infty \ell^{-rt}(U_t - c(A_t))dt\right] \geq \hat{W}$$

Модель оптимального контракта Ю.Санникова (2004).

F(*W*) – наибольшая прибыль принципала от контракта с агентом с резервной заработной платой (детерминическим эквивалентом) *W*.

Оптимальный контракт: $$F''(W) = \min_{a>0,u} \frac{rF(W) - a + g(u) - F'(W)(rW - u + c(a))}{\gamma(a)^2/2}$$

установлением *F*(0) = 0 и выбором наибольшего значения *F'*(0)>0, такого, что решение *F* достигает F_0 в некоторой точке $W_{gp}>0$

$$\gamma(a) = \min\left\{ y \in \left[0, \infty\right) : \frac{ya}{\sigma} - c(a) \geq \frac{ya'}{\sigma} - c(a') \forall a' \in \overline{A} \right\}$$

Первоначальное предложение благосостояния агенту:

$$W_0 = \begin{cases} W^*, \hat{W} < W^* \\ \hat{W}, \hat{W} \in [W^*, W_c] \\ не\_залючать\_контракта, \hat{W} > W_C \end{cases}$$

Сравнительная статика для модели Ю. Санникова (2004)

$$A = \{0, a\}$$

•Изменение дисперсии оказывает на изменение на прибыль принципала такое же воздействие как изменение ставки дисконтирования;
• Прибыль принципала возрастает от усилий агента, и убывает от издержек приложения усилий, дисперсии технологии и ставки дисконтирования;
•Пропорциональное увеличение уровня усилий, издержек приложения усилий и дисперсии технологии приведет к росту прибыли принципала.

Модификации модели , Ю.Санникова (2004 г.)

1. Агент получает возможность прервать контракт, получив при этом выгоды альтернативной занятости за вычетом издержек поиска работы.
2. У принципала имеется возможность заменять одного агента другим, неся при этом издержки поиска (уволенный агент продолжает получать выплаты).
3. Предельная полезность потребления для агента при нулевом потреблении конечна.

Выявленные недостатки рассмотренных моделей

1. Ограничение на участи не всегда выполняется как равенство;
2. На практике переменная часть заработной платы оказывается значительно меньшей;
3. Отдельные компоненты постоянной части заработной платы также выполняет мотивирующую роль;
4. Большую роль играет нематериальное стимулирование.

Модифицированная модель оптимального контракта

Технология: $dX_t = \mu_t dt + \sigma dB_t \quad X_t = (x_{1t}, ..., x_{kt})\ \mu_t = (\mu_{1t}, ..., \mu_{kt})$

$B_t : B_0 = 0, Var(dB_t) = dt\Sigma \ \Sigma = \left\{\sigma_{pk} \mid p, k = \overline{1, K}\right\}$

Вознаграждение: $\sum_{k=1}^{K} w_k(X_k)$ -переменная часть вознаграждения;

$\sum_{j=1}^{m} V_j$ - постоянная материальная часть вознаграждения;

$\sum_{i=1}^{n} Z_i$ -постоянная нематериальная часть вознаграждения.

Издержки приложения усилий:

$$c = A\sum_{k=1}^{K} \mu_k^2 \left(\sum_{j=1}^{m} V_j^{\beta_j} + \sum_{i=1}^{n} Z_i^{\gamma_i} \right)^{-1}$$

Задача принципала:

$$\max E\pi = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \mu_k - \sum_{k=1}^{K} w_k \mu_k - \sum_{j=1}^{m} V_j - \sum_{i=1}^{n} CZ_i(Z_i)$$

$$s.t. \begin{cases} \overrightarrow{e^*} = \arg\max EU(\vec{e}) \\ EU(\vec{e}) \geq U_r(0) \end{cases}$$

λ_k – вклад k-го показателя результативности в общую добавленную стоимость принципала;

CZ_i – издержки i-го вида нематериального стимулирования агента.

Решение задачи агента:

$$\mu_k = \frac{1}{2A} w_k \left(\sum_{j=1}^{m} V_j^{\beta_j} + \sum_{i=1}^{n} Z_i^{\gamma_i} \right)$$

Решение задачи принципала:

$$CZ_i(Z_t) = B_i Z_i^{\alpha_i}$$

$$\max E\pi_t = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \frac{1}{2A} w_k \left(\sum_{j=1}^{m} V_j^{\beta_j} + \sum_{i=1}^{n} Z_i^{\gamma_i} \right) -$$

$$\sum_{k=1}^{K} w_k \frac{1}{2A} w_k \left(\sum_{j=1}^{m} V_j^{\beta_j} + \sum_{i=1}^{n} Z_i^{\gamma_i} \right) - \sum_{j=1}^{m} V_{jt} - \sum_{i=1}^{n} B_i Z_i^{\alpha_i}$$

Оптимальный контракт:

$$w_k = \frac{\lambda_k}{2}$$

$$V_j = \left(\frac{8A}{\beta_j \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^2} \right)^{\frac{1}{\beta_j - 1}}$$

$$Z_i = \left(\frac{8A\alpha_i B_i}{\gamma_i \sum_{k=1}^{K} \lambda_k^2} \right)^{\frac{\alpha_i - \gamma_i}{\gamma_i - 1}}$$

Модель стимулирующего контракта Б.Холмстема, П. Милгрома (1987 г.)

Технология: $dX_t = \mu_t dt + \sigma dB_t \; B_t : B_0 = 0, Var(dB_t) = dt\sigma$

Вознаграждение: $w(X) \quad V$

Издержки приложения усилий:

$$c = A\mu^2$$

Задача принципала:

$$\max E\pi = \lambda\mu - w(\mu) - V$$

$$s.t.\begin{cases} \mu = \arg\max EU(\mu) \\ EU(\mu) \geq U_r(0) \end{cases}$$

Решение задачи принципала:

Из решения задачи агента получаем: $\mu = \frac{1}{2A} w$

Ограничение на участие: $V \geq w_r + A\mu^2 - w\mu + \frac{r}{2} w^2 \sigma^2$

Оптимальный контракт:

$$w = \frac{\lambda}{1 + 2Ar\sigma^2}$$

$$V = w_r + \frac{\lambda^2 \left(2r\sigma^2 - 1\right)}{4\left(1 + 2Ar\sigma^2\right)^2}$$

Структура стандартного и модифицированного контракта:

Модифицированный контракт: $$\frac{\mu w}{V} = \frac{1}{\beta}$$

Стандартный контракт: $$\frac{\mu w}{V} = \frac{2}{A\left(2r\sigma^2 - 1\right)}$$

Модель оптимального контракта с учетом переменной части нематериального стимулирования: $\mu_t = (\mu_{1t}, ..., \mu_{kt})$

Вознаграждение:

$w(X)$ -переменная часть вознаграждения;

V - постоянная материальная часть вознаграждения;

$U(X)$ -переменная часть нематериального вознаграждения.

Задача агента:

$$\max EU_t =$$

$$= -\exp\left(-r\left(w\mu + V + U\xi\mu - A\mu^2\right) + \frac{r^2}{2}\left(w + U\xi\right)^2 \sigma^2 \right)$$

Решение задачи агента: $\mu = \dfrac{w + U\xi}{2A}$

Решение задачи принципала:

$$CU = CU^2$$

$$\max E\pi_t = \lambda \frac{w + U\xi}{2A} - w\left(\frac{w + U\xi}{2A}\right) - V - CU^2$$

Из необходимого условия оптимума находим:

$$w = \frac{\lambda - U\xi}{2}$$

Оптимальный контракт:

$$U = \frac{\lambda\xi}{8AC - \xi^2}$$

$$w = \frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{\xi^2}{8AC - \xi^2}\right)$$

Свойства сравнительной статики для оптимальной структуры вознаграждения:

$$\frac{\partial U}{\partial A} = \frac{-8C\lambda\xi}{\left(8AC - \xi^2\right)^2} < 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial A} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{8C\xi^2}{\left(8AC - \xi^2\right)^2}\right) > 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial C} = \frac{-8A\lambda\xi}{\left(8AC - \xi^2\right)^2} < 0, \lim_{C \to 0} U = \frac{\lambda}{\xi}, \lim_{C \to \infty} U = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial C} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{8A\xi^2}{\left(8AC - \xi^2\right)^2}\right) > 0, \lim_{C \to 0} w = 0, \lim_{C \to \infty} w = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{8AC\lambda + \lambda\xi^2}{\left(8AC - \xi^2\right)^2} > 0, \lim_{\xi \to 0} U = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\lambda\left(\frac{8AC\xi}{\left(8AC - \xi^2\right)^2}\right) < 0, \lim_{\xi \to 0} w = \frac{\lambda}{2}$$

Направления для дальнейших исследований

1. Анализ влияния на структуру вознаграждения пороговых составляющих переменной части вознаграждения;
2. Анализ влияния на структуру вознаграждения отношения к риску принципала и агента, а также ограничения на участие;
3. Анализ влияния на мотивацию отложенных обещаний работодателя.
4. Анализ влияния на мотивацию издержек изменения условий контракта.
5. Анализ оптимального контракта для случая, когда агенту доступен контроль над дисперсией технологии при условии сохранения линейной формы оптимального контракта.